УДК. 550.831 ***Ю.І. Дубовенко***

ПРО АНАЛІТИЧНУ АПРОКСИМАЦІЮ ГУСТИНИ ЗА ДАНИМИ ГРАДІЄНТА СИЛИ ТЯЖІННЯ

Математичні постановки конкретних геофізичних задач зводяться у підсумку до визначення значень коефіцієнтів рівнянь математичної фізики, які входять у ці постановки. В руслі цього факту розв'язання задачі Алексідзе у вигляді нелінійного інтегрального рівняння зведено до лінійної комбінації шуканих розв'язків. Ця альтернативна задача зведена до класичної задачі варіаційного числення.

Ключові слова: гравіметрія; обернена задача; аналітична апроксимація; аналітичне продовження; градієнт сили тяжіння; лінійна контактна задача; задача Алексідзе; метод Ньютона.

Обмеження математичного моделювання в геофізиці. Фахівці функціонально-аналітичного напряму геофізики розробляють методи і алгоритми в рамках відомих інтегро-диференціальних рівнянь математичної фізики, які описують поведінку геофізичних полів. Їх зусилля спрямовані на визначення деяких коефіцієнтів цих рівнянь та внесення відповідних поправок за "складність" геологічного середовища. Ці коефіцієнти визначаються за допомогою ітераційних схем в рамках методики розв'язання некоректних обернених задач геофізики за Тихоновим [Лаврентьев, 2010].

Проте визначення цих коефіцієнтів за функціями, які утворюють відповідні системи рівнянь – принципово неоднозначне. Це очевидно при серійних машинних розрахунках на системах великої розмірності [Страхов, 2007]. А при найменших похибках у вхідних даних розв'язки ще й істотно нестійкі. Здолати цю нестійкість на порядок важче, ніж отримати формальні розв'язки задач. До того ж, *слід вхідних функцій*, за яким визначають їх коефіцієнти – *двовимірний*, а відновити потрібно *тривимірне* поле. А вже за значеннями поля слід знайти коефіцієнти при третій координаті, яка зовсім не співпадає з розмірністю сліду.

Формальний розв'язок цієї проблеми дає псевдопросторовий розподіл коефіцієнтів (густин чи інших параметрів), який "розчиняється" серед еквівалентних розв'язків задачі. Крім того, позичивши апарат математичної фізики, геофізики одночасно успадкували з ним і *евклідову структуру просторів* функцій, яка для регіональних побудов недостатня [Дубовенко, 2011а]. Але обмеженість інтегро-диференціальних операторів, які апроксимують математичну модель геологічного середовища – лише методична сторона проблеми.

Вхідні дані – це, загалом, двовимірні проекції геофізичних полів на поверхню Землі, виміряні з похибками на розрідженій нерегулярній мережі спостережень. Вони апріорі отримані з *невідомими похибками*, тому на додачу до вказаних вище методичних проблем ускладнюють поведінку (і визначення) функцій, які входять у відповідні модельні рівняння. А розвиток комп'ютерного моделювання призвів до застосування дискретної шкали вхідних функцій. Враховуючи, що досі не освоєно пряме отримання вхідних даних для обернених задач геофізики із баз даних пунктів спостережень [Якимчик, 2010], переведення неперервних вхідних даних у дискретну форму в цифровій картографії неухильно вносить додаткові спотворення, крім похибок вимірів. Ці проблеми являються наслідком *методології* отримання даних минулого століття, яка відживає своє. Ми їх називаємо методологічними проблемами.

Новий геофізико-математичний апарат. Указані вище, та інші математичні і методичні проблеми, зумовлені неадекватністю апарата математичного моделювання геофізичних даних, спонукають геофізиків розробляти власний геофізико-математичний апарат. В його рамках істотно перероблені відомі математичні методи з урахуванням фактів, які властиві винятково геофізичним явищам. Розпочав розробку своєрідного "геофізичного діалекту" В.М. Страхов [Страхов, 2001] у сфері потенціальних полів, врахувавши ортогональність сигналу і похибки та дискретність даних; продовжив В.В. Гольдін в сейсміці, В.В. Аксьонов у електродинаміці і т.д.

Без чіткої національної програми розвитку технологій потенціальних полів і створення мережі моніторингу цих полів не можна впливати на реформу принципів отримання вихідних даних. Можливо, адекватна потребам геофізиків-польовиків та інтерпретаторів система неперервних спостережень для формування загальнодоступної бази даних гравімагнітних полів постане в ближчій перспективі. Але можна подати деякі міркування щодо нових зображень математичних моделей геологічного середовища і геофізичних полів у рамках апроксимаційного підходу [Страхов, 2001] до створення подібних конструкцій.

Нова постановка оберненої задачі гравіметрії. Стійкі способи відновлення потенціалу сили тяжіння вкрай важливі і для детальної гравіметрії і для глобального відновлення фігури Землі. Останнім часом ради підвищення стійкості та надійності розв'язків у практичних застосуваннях задач теорії потенціалу вживають нову величину – градієнт потенціалу сили тяжіння. Теоретично вона визначена ще в роботі [Алексидзе, 1965]. Сучасні трактування градієнта потенціалу сили тяжіння орієнтовані на застосування у поєднанні з класичним зображенням аномалії сили тяжіння як вертикальної похідної потенціалу.

Одначе значно вищу стійкість і ширше коло за-

стосувань (хоча й складніше двоступеневе обчислення) має аналітичне продовження згаданого градієнта для спеціально отриманої [Дубовенко, 2011а] нової аналітичної (диференціальної) моделі поля сили тяжіння. В ній врахована векторна природа сили тяжіння, градієнт її зміни залежно від рівня кривизни поверхні вимірів. Також визначені похибки, які виникають при заміні прямого оператора відомого в аналітичному продовженні рівняння Пуассона на рівняння сили тяжіння: вони пропорційні геометричним параметрам області досліджень.

Коротко основні етапи її виведення ілюструє такий ланцюжок рівнянь:

$$\operatorname{divgrad}(\bar{g},\bar{n})=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i^2}\equiv\frac{\partial}{\partial\bar{n}}\left[\Delta W(x)\right]+a^2(x)\cdot g(x),$$

де $g(x)=\operatorname{grad}W(x)$, $\bar{n}(x)=\dfrac{\operatorname{grad}W(x)}{\left|\operatorname{grad}W(x)\right|}$,

$$\Delta W(x)=-4\pi f\mu(x)+2\omega^2,\ \mu(x)\in C^{(1)}(G),$$

$a^2(x)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\cos(\bar{n},x_j)\right)^2$ – міра кривизни поверхні вимірів. Звідси після ряду перетворень отримаємо основне диференціальне рівняння сили тяжіння

$$L[g(x)]=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i^2}-a^2(x)g(x)=\begin{cases}-4\pi f\left|\operatorname{grad}\mu(x)\right|, & x\in G\\ 0, & x\in V\end{cases}. \quad (1)$$

В рамках розв'язання однорідної частини цього рівняння виникла нелінійна гранична задача Алексідзе для рівняння Лапласа [Дубовенко, 2011б], яка містить в граничних умовах значення модуля градієнта потенціалу сили тяжіння. Її розв'язок повністю теоретично обґрунтований для тяжіючих тіл, обмежених поверхнями Ляпунова. Певні труднощі її розв'язання відомими чисельними методами виявлені у роботі [Дубовенко, 2010].

Загалом, для визначення модуля градієнта сили тяжіння $g(x)=\left|\operatorname{grad}W(x)\right|$ на поверхні ∂G Землі отримано рівняння

$$g^2(x)=\frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{\partial G}\int\limits_{\partial G}\frac{\sigma(\xi)}{|x-\xi|^2}\frac{\sigma(\eta)}{|x-\eta|^2}\cos(p,q)dS_\xi dS_\eta \quad (2)$$

а поверхнева густина $\sigma(\xi),\ \xi\in\partial G$, яка входить у вираз (2), визначається з нелінійного рівняння:

$$g^2(x)=\frac{\sigma^2(x)}{16}+\frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{\partial G}\int\limits_{\partial G}\sigma(\xi)\times$$
$$\times\sigma(\eta)\frac{\cos(p,q)}{|x-\xi|^2\cdot|x-\eta|^2}dS_\eta dS_\xi, \quad (3)$$

де напрямні косинуси компонент градієнта рівні

$$\cos(p,q)=\sum_{i=1}^{3}\frac{(x_i-\xi_i)}{|x-\xi|}\cdot\frac{(x_i-\eta_i)}{|x-\eta|}.$$

Методика розв'язання задачі. Щоб отримати розв'язок рівняння (3), в [Дубовенко, 2011а] запропоновано дві ітераційні схеми, на жаль, мало придатні для практичних обчислень великої розмірності. Гадаємо, це сталось внаслідок слабкої збіжності відповідного інтеграла (в смислі головного значення). А його регуляризація через зображення відрізком ряду не гарантує бажаної точності розв'язків.

Один із можливих способів розв'язання рівняння (3) такий. Подамо його шуканий розв'язок $\sigma(\xi),\ \xi\in\partial G$ у вигляді такої лінійної комбінації $\sigma(x)=\sum\sum a_{ij}\varphi_{ij}(x)$. Тоді його квадрат дорівнює $\sigma^2(x)=\sum a_{ij}a_{kl}\varphi_{ij}(x)\varphi_{kl}(x)$. Тепер формалізуємо вираз (3) через введене позначення:

$$\frac{\sigma^2(x)}{16}+\frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{\partial G}\int\limits_{\partial G}\sigma(\xi)\cdot\sigma(\eta)\frac{\cos(p,q)}{|x-\xi|^2\cdot|x-\eta|^2}dS_\eta dS_\xi=$$
$$=\frac{1}{16}\left\{\sum_{i,j}\sum_{k,l}a_{ij}a_{kl}\varphi_{ij}(x)\varphi_{kl}(x)+\right.$$
$$+\sum_{i,j}\sum_{k,l}a_{ij}a_{kl}\cdot\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\partial G}\varphi_{ij}(\xi)\varphi_{kl}(\eta)\frac{\cos(p,q)}{|x-\xi|^2\cdot|x-\xi|^2}dS_\xi dS_\eta\equiv$$
$$\equiv f\left(a_{ij}a_{kl}\right). \quad (4)$$

В такому поданні задача в підсумку зводиться до *класичної* апроксимаційної постановки: знайти коефіцієнти a_{ij} рівняння (4) так, щоб виконувалась умова мінімізації нев'язки функціонала

$$\left\|g^2(x)-f\left(a_{ij}a_{kl}\right)\right\|=\min_x \quad (5)$$

Висновок. Тепер, зважаючи, яку з популярних у теорії обернених задач метричних норм ми оберемо, задача знаходження аналітичної апроксимації (4)-(5) вирішується у тому чи іншому просторі за допомогою класичних варіаційних методів, зокрема, модифікацій метода Ньютона. Розв'язок отримується у кілька разів швидше (залежно від архітектури комп'ютера), а точні переваги виявляться після випробувань на польових даних.

Литература

Лаврентьев М.М. и др. Применение регуляризации в гравимагниторазведке при поисках месторождений углеводородов. – Москва, 2010.

Страхов В.Н. Об эффективных по быстродействию и точности методах построения линейных аналитических аппроксимаций в геофизике, геоинформатике и гравиметрии \\ Геофиз. журн. – 2007. – 29, № 1.

Дубовенко Ю.И. Об определении погрешностей гравиметрических трансформаций \\ Геофиз. журн. – 2011а. – 33, № 1.

Якимчик А. И. Технология оцифровки карт факти-

ческого материала на основе программного обеспечения MapInfo Professional и CorelDraw // Геофиз. журн. – 2010. – 32, № 3.

Страхов В.Н. Смена парадигмы в теории линейных некорректных задач. – Москва, 2001.

Страхов В.Н. Линейные аналитические аппроксимации рельефа поверхности Земли // Геофизика и математика. – Москва, 1999.

Алексидзе М.А. Редукция силы тяжести. – Тбилиси, 1965.

Дубовенко Ю.И. О приложениях модуля градиента потенциала силы тяжести в задаче Алексидзе \\ Глубинное строение, геодинамика, тепловое поле Земли, интерпретация геофизических полей: 6-е науч. чтения Ю.П. Булашевича, Екатеринбург, 12-17 сент. 2011 г. – Екатеринбург, 2011б.

Дубовенко Ю.И. О трансформациях гравиполя с помощью задачи Алексидзе \\ XI Уральская мол. науч. школа по геофизике, 15-19 марта 2010 г., Екатеринбург. – Екатеринбург, 2010.

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПЛОТНОСТИ ПО ДАННЫМ ГРАДИЕНТА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Ю.И. Дубовенко

Математические постановки конкретных геофизических задач сводятся в итоге к определению значений коэффициентов уравнений математической физики, входящих в эти постановки. В русле этого факта решение задачи Алексидзе в виде нелинейного интегрального уравнения сведено к линейной комбинации искомых решений. Эта альтернативная задача сведена к классической задаче вариационного исчисления.

Ключевые слова: гравиметрия; обратная задача; аналитическая аппроксимация; аналитическое продолжение; градиент силы тяжести; линейная контактная задача; задача Алексидзе; метод Ньютона.

ON ANALYTICAL DENSITY APPROXIMATION BY THE GRAVITY GRADIENT DATA

Yu.I. Dubovenko

Mathematical statements of the specific geophysical problems are reduced in in the upshot to the definition of the coefficients values of the mathematical physics equations being part of the statements. In channel of that fact the sulution of the Alexidze problem in the form of non-linear integral equation is reduced to the linear combination of the solutions required. Suchlike alternative problem is reduced to the classic problem of variational calculus.

Key words: gravimetry; inversion; analytical approximation; analytical continuation; gravity gradient; linear contact problem; Alexidze problem; Newtonian method.

Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України, м. Київ
Надійшла 01.10.2013